Inleiding Klassieke Mechanika

een voorbereiding op de sessies over de
Speciale en Algemene Relativiteitstheorie

Geraadpleegd:
- Landau en Lifschitz: Course of Theoretical Physics Vol I, Mechanics, 1960 (LL1)
- R. Kronig: Collegedictaat Theoretische Natuurkunde TUD, 1965 (K1)
- B.W. Carroll & D.A. Ostlie: Modern Astrophysics (ModAs)

Klassieke (Newtonse) mechanika

- Referentie- en inertiaalsystemen, Galileïsch reletiviteitsprincipe
- Wetten van Newton
  - Behoudswetten
  - Actie-integraal, Functie van Lagrange
- Beginsel van Hamilton
  - Bewegingsvergelijkingen van Lagrange
  - Behoudswetten

- Zwaartekracht volgens Newton
  - Equivalentie van zware en trage massa
- Beweging in een centraal krachtveld
  - Wetten van Kepler
  - Precessie

Referentie- en inertiaalstelsels

Om processen die plaatsvinden in de natuur te beschrijven is een **referentiesysteem** nodig:

- systeem van coördinaten om de positie van een deeltje in de ruimte vast te leggen, én
- aan dit systeem gekoppelde klokken om de tijd aan te geven

Een voorbeeld van zo'n referentiesysteem is een **inertiaalstelsel**: een stelsel van ruimte- en tijdcoördinaten waarin de traagheidswet geldt:

- een vrij massadeeltje (dus in afwezigheid van erop inwerkende uitwendige krachten) is óf in rust óf het beweegt zich met een constante snelheid (grootte en richting) voort

Bij transformaties naar een willekeurig ander referentiestelsel hoeft dit niet te gelden, tenzij men zich beperkt tot <u>lineaire</u> transformaties van coördinaten en tijd

Relativiteitsprincipe van Galilei

Voor inertiaalstelsels geldt het **relativiteitsprincipe**:

- alle natuurwetten zijn hetzelfde in alle inertiale referentiesystemen; alle inertiaalsystemen zijn in dit opzicht volledig equivalent.

Dit houdt in dat de vergelijkingen van de natuurwetten **invariant** zijn onder Galileï-transformaties van coördinaten en tijd van het ene inertiaalsysteem naar een ander:

$$\boldsymbol{r}' = \boldsymbol{r} - \boldsymbol{V}t$$
$$t' = t$$

De klassieke of Newtonse mechanica is op dit Galileïsche relativiteitsprincipe is gebaseerd. Hierbij zijn:

- de **tijd absoluut**: er is één tijd verondersteld voor alle referentiesystemen; er kan zinvol van gelijktijdigheid van gebeurtenissen worden gesproken;
- de **afstanden absoluut** tussen *gelijktijdige* gebeurtenissen in de ruimte (tussen *niet-gelijktijdige* gebeurtenissen zijn de afstanden relatief)

Wetten van Galileï en Newton

1. Een vrij lichaam blijft in rust of volhardt in zijn éénparige, rechtlijnige beweging (traagheidswet van Galileï)

2. De verandering van de impuls (de hoeveelheid van beweging) $\boldsymbol{p} = m\dot{\boldsymbol{r}}$ van een lichaam is evenredig met de effectief op het lichaam werkende kracht $\dot{\boldsymbol{p}} = m\ddot{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{F}$ (Newton).

3. Actiekracht en reactiekracht zijn gelijk in grootte, maar tegengesteld gericht (Newton).

Uit Newton's wetten volgt (1)

Voor een systeem van een aantal puntmassa's geldt:

- de interactiekrachten tussen de puntmassa's onderling vallen paarsgewijs weg (actie = - reactie)
- de verandering van totale impuls (som van de individuele impulsen) van het systeem van puntmassa's is gelijk aan de totale uitwendige kracht $\boldsymbol{F}'$
- de totale impuls is dus een **constante van de beweging van een gesloten systeem ($\boldsymbol{F}'$= 0)**.

Het zwaartepunt van het systeem beweegt alsof de hele massa hier geconcentreerd is en alle uitwendige krachten hier aangrijpen.

Uit Newton's wetten volgt (2)

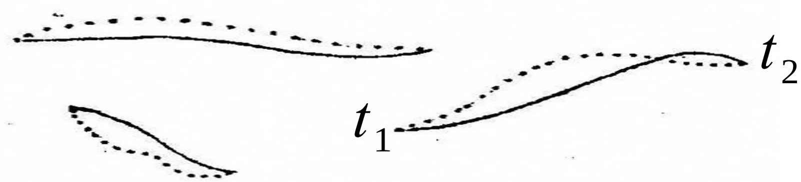
De **totale energie** (som van kinetische en potentiële) is een constante van de beweging van een gesloten systeem.

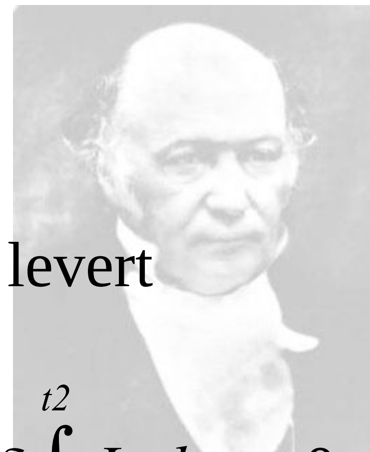
De kinetische energie van het systeem is gelijk aan die van de totale massa, geconcentreerd gedacht in het zwaartepunt, plus die van de bewegende delen van het systeem ten opzichte van het zwaartepunt.

Het **totale impulsmoment** is een constante van de beweging van een gesloten systeem.

De functie van Lagrange

Uitgaande van Newton’s 2e wet wordt de actie van een systeem van puntmassa’s die een virtuele verplaatsing δ uitvoeren tov de werkelijke beweging, geïntegreerd tussen de tijdstippen t_1 en t_2, waarbij op deze tijdstippen de virtuele posities samenvallen met de werkelijke:





In afwezigheid van snelheidsafhankelijke potentialen levert uitwerking:

$$\int_{t1}^{t2} \sum_j (m_j \ddot{\boldsymbol{r}}_j - \boldsymbol{F}_j).\,\delta \boldsymbol{r}_j \, dt = -\int_{t1}^{t2} (\delta T - \delta U)\, dt = -\delta \int_{t1}^{t2} L \, dt = 0$$

waarin L de functie van Lagrange voorstelt. De integraal van L is dus extreem (minimaal) voor de werkelijke beweging.

Principe van Hamilton en bewegingsvergelijkingen van Lagrange

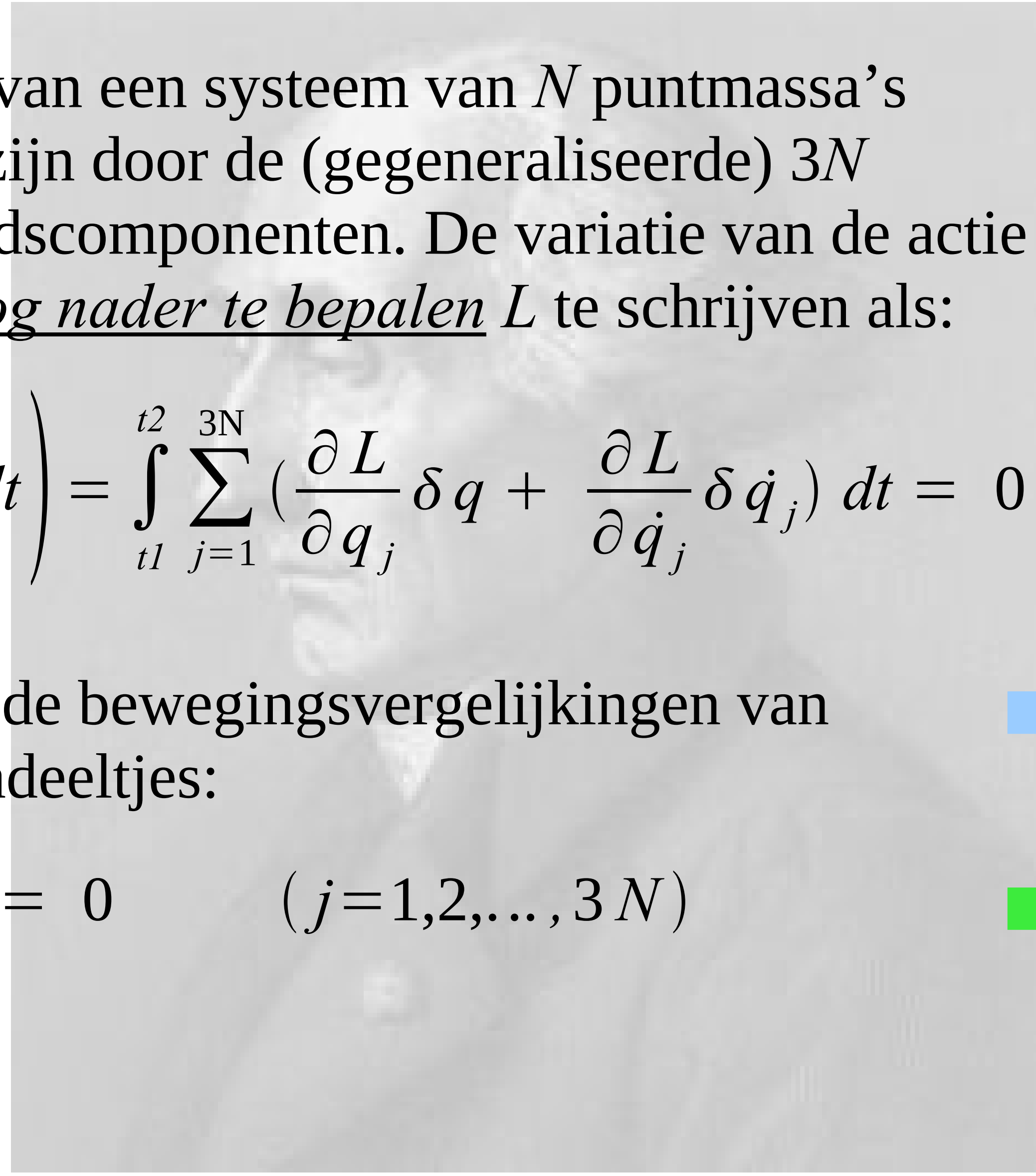
Het beginsel van Hamilton generaliseert dit variatieprincipe. Wij leiden nu hiermee de bewegingsvergelijkingen van Lagrange af.

Het zal blijken dat wij, alleen gebruik makend van deze concepten en van de homogeniteit en isotropie van ruimte en tijd kunnen afleiden:

- Newton's eerste wet (Galileï's traagheidswet)
- Newton's tweede wet
- Energie als constante van de bewegings
- Impulsmoment als constante van beweging

Deze benadering is van belang, omdat deze methodiek bij de SRT en ART herhaaldelijk zal worden toegepast.

Bewegingsvergelijkingen van Lagrange



De mechanische toestand van een systeem van N puntmassa's blijkt volledig bepaald te zijn door de (gegeneraliseerde) 3N coördinaten en 3N snelheidscomponenten. De variatie van de actie integraal is dus met een *nog nader te bepalen* L te schrijven als:

$$\delta S = \delta\left(\int_{t1}^{t2}\sum_{j=1}^{3N} L(q_j,\dot{q}_j)\,dt\right) = \int_{t1}^{t2}\sum_{j=1}^{3N}\left(\frac{\partial L}{\partial q_j}\delta q + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\delta\dot{q}_j\right)dt = 0$$

Uitwerking hiervan levert de bewegingsvergelijkingen van Lagrange voor de N massadeeltjes:

$$\frac{\partial L}{\partial q_j} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} = 0 \qquad (j = 1,2,\ldots,3N)$$

Homogeniteit en isotropie

Maar eerst nog even de begrippen:

Homogeniteit van de ruimte

Homogeniteit van de tijd

Isotropie van de ruimte

Bepaling van de Lagrange functie (1)

1. Voor een vrij deeltje kan L kan niet expliciet van de plaatscoördinaten of tijd afhangen (homogeniteit **r** en t), noch van de richting (isotropie), dus alleen van $|\boldsymbol{v}|$ of $\boldsymbol{v}^2$.

   Omdat $\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{r}} = \mathbf{0}$ is $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{v}}\right) = \mathbf{0}$ en dus $\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{v}} = \boldsymbol{constant}$. Dus

   moet $\boldsymbol{v}$ constant zijn (traagheidswet)

2. In een inertiaalstelsel met snelheid $\boldsymbol{\varepsilon}$ moet L op een constante of een totale tijdsafgeleide na gelijk zijn:

   $$L'(\boldsymbol{v}'^2) = L(\boldsymbol{v}'^2) = L(\boldsymbol{v}^2 + 2\boldsymbol{v}.\boldsymbol{\epsilon} + \boldsymbol{\epsilon}^2) \approx L(\boldsymbol{v}^2) + \frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{v}^2} 2\boldsymbol{v}.\boldsymbol{\epsilon}$$

   De laatste term moet dus een lineaire functie zijn van $\boldsymbol{v} = \frac{d\boldsymbol{r}}{dt}$,

   dus $L = \frac{1}{2} m v^2$ (introductie van de trage massa als constante)

Bepaling van de Lagrange functie (2)

3. Voor gesloten systeem van deeltjes met alleen onderlinge interactie blijkt:
$$L = \sum_{j=1}^{N} \frac{1}{2} m_j \boldsymbol{v}_{\boldsymbol{j}}^{2} - U(\boldsymbol{r}_{\mathbf{1}}, \boldsymbol{r}_{\mathbf{2}}, \ldots, \boldsymbol{r}_{N})$$
Hiermee leidt de bewegingsvergelijking voor het j^e deeltje:
$$0 = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{v}_{\boldsymbol{j}}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{r}_{\boldsymbol{j}}} = m_j \frac{d\boldsymbol{v}_{\boldsymbol{j}}}{dt} + \frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{r}_{\boldsymbol{j}}} = m_j \frac{d\boldsymbol{v}_{\boldsymbol{j}}}{dt} - \boldsymbol{F}_{\boldsymbol{j}}$$
tot de **tweede wet van Newton**

4. Dit systeem kan worden gezien als een enkel deeltje onder invloed van een uitwendige kracht (nl. de wisselwerking met alle andere deeltjes die een bepaalde beweging uitvoeren als functie van de tijd):
$$L = \frac{1}{2} m \boldsymbol{v}^{\mathbf{2}} - U(\boldsymbol{r}, t)$$
$$\boldsymbol{F} = m\dot{\boldsymbol{v}} = -\frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{r}}$$

Behoudswetten met Lagrange (1)

Homogeniteit van de tijd maakt dat voor een gesloten systeem L niet expliciet van de tijd kan afhangen. Dan is (gebruik makend van de bewegingsvergelijkingen):

$$\frac{dL}{dt} = \sum_{j=1}^{N} \frac{\partial L}{\partial q_j}\dot{q}_j + \sum_{j=1}^{N} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\ddot{q}_j + \cancel{\frac{\partial L}{\partial t}}$$

$$= \sum_{j=1}^{N} \dot{q}_j \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right) + \sum_{j=1}^{N} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\ddot{q}_j = \sum_{j=1}^{N} \frac{d}{dt}\left(\dot{q}_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right)$$

En dus blijkt $\sum_{j=1}^{N} \dot{q}_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - L$ een constante van de beweging van het systeem.

Omdat L kwadratisch is in $\dot{q}_j$, is $\sum_{j=1}^{N} \dot{q}_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} = 2T$ en dus is

$E = 2T - L = T + U$ constant gedurende de beweging.

Behoudswetten met Lagrange (2)

Homogeniteit van de ruimte eist dat voor een lichaam zonder interacties de verschillende posities in de ruimte mechanisch equivalent zijn. Onder een transformatie voor een systeem van deeltjes op positie $\boldsymbol{r}_j$ naar $\boldsymbol{r}_j + \boldsymbol{\varepsilon}$ moet dan $L = \sum_{j=1}^{N} \frac{1}{2} m_j \boldsymbol{v}_j^2 - U(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, \ldots,)$ voor iedere $\boldsymbol{\varepsilon}$ gelijk blijven, dus $\delta L = \sum_{j=1}^{N} \frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{r}_j} . \delta \boldsymbol{r}_j = \boldsymbol{\epsilon} . \sum_{j=1}^{N} \frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{r}_j} = 0$ en

$$\sum \frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{r}_j} = -\sum \frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{r}_j} = \sum \boldsymbol{F}_j = 0$$

Voor 2 deeltjes volgt hieruit: **actie= - reactie** (3e wet Newton).

Uit de bewegingsvergelijkingen volgt nu dat $\frac{d}{dt} \sum_j \frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{v}_j} = \boldsymbol{0}$, dus met $\boldsymbol{P} \equiv \sum_j \boldsymbol{p}_j \equiv \sum_j \frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{v}_j}$ vinden wij dat de impuls van een gesloten systeem constant blijft gedurende de beweging. Voor een enkel deeltje in interactie met de rest van het gesloten systeem is dan

$$\dot{\boldsymbol{p}}_j - \boldsymbol{F}_j = \boldsymbol{0} \quad \Rightarrow \quad \dot{\boldsymbol{p}} = \boldsymbol{F}$$

Behoudswetten met Lagrange (3)

Isotropie van de ruimte vereist dat de mechanische eigenschappen van een gesloten systeem niet veranderen als dit in zijn geheel op een willekeurige manier wordt gedraaid in de ruimte. Bij een draaiïng over $\delta\boldsymbol{\varphi}$ is $\delta\boldsymbol{r} = \delta\boldsymbol{\varphi}\ x\ \boldsymbol{r}$ en $\delta\boldsymbol{v} = \delta\boldsymbol{\varphi}\ x\ \boldsymbol{v}$ is dus:

$$
\begin{aligned}
\delta L &= 0 \\
&= \sum_j \left(\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{r}_j}\delta \boldsymbol{r}_j + \frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{v}_j}\delta \boldsymbol{v}_j\right) = \sum_j \left(\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{v}_j}\right)\delta \boldsymbol{r}_j + \frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{v}_j}\delta \boldsymbol{v}_j\right) \\
&= \sum_j \left(\dot{\boldsymbol{p}}_j . \delta\boldsymbol{\phi}\times\boldsymbol{r}_j + \boldsymbol{p}_j . \delta\boldsymbol{\phi}\times\boldsymbol{v}_j\right) = \delta\boldsymbol{\phi} . \sum_j \left(\boldsymbol{r}_j\times\dot{\boldsymbol{p}}_j + \boldsymbol{v}_j\times\boldsymbol{p}_j\right) \\
&= \delta\boldsymbol{\phi} . \frac{d}{dt}\sum_j \boldsymbol{r}_j\times\boldsymbol{p}_j = 0
\end{aligned}
$$

Het impulsmoment $\boldsymbol{B} \equiv \sum \boldsymbol{r}_j\times\boldsymbol{p}_j$ van een gesloten systeem blijft dus constant gedurende de beweging.

Energie en impuls in relatie tot de actiefunctie

Energie en impuls kunnen ook direct uit de actiefunctie S worden afgeleid. Bij een variatie van het eindpunt op tijdstip t in de actieintegraal en met inachtname van de bewegingsvergelijkingen, vinden wij:

$$\boldsymbol{p} = \frac{\partial S}{\partial \boldsymbol{q}}$$

$$E = -\frac{\partial S}{\partial t}$$

Bij afleidingen in de SRT en ART zullen deze relaties ook weer terugkomen.

Newtonse zwaartekracht, zware en trage massa

Twee massa's oefenen een aantrekkende kracht op elkaar uit die evenredig is met beide massa's, en omgekeerd evenredig met het kwadraat van de afstand:

$$\boldsymbol{F} = G\, m\, M\, \frac{\boldsymbol{r}}{r^3}$$

Hier zijn de massa's de grootheden die de sterkte van de zwaartekracht bepalen, die op het andere lichaam wordt uitgeoefend. Deze grootheid worden daarom de **zware massa** m_z genoemd.

In Newton's 2e wet is de massa ingevoerd als de evenredigheids-constante die vastlegt welke kracht nodig is om een lichaam een bepaalde versnelling te geven. Deze grootheid wordt daarom de **trage massa** m_t genoemd:

Zware en trage massa (2)

Aangezien de actie- en reactiekracht tussen twee lichamen in grootte aan elkaar gelijk zijn, voldoet de versnelling g van een lichaam met trage massa m_t en zware massa m_z onder invloed van de zwaartekracht van een ander lichaam met zware massa M_z aan:

$$F = m_t g = -G \frac{M_z m_z}{r^2} \quad \Rightarrow \quad g = -\frac{G M_z}{r^2} \frac{m_z}{m_t}$$

en is g dus ook afhankelijk van de verhouding $\dfrac{m_z}{m_t}$

Empirisch blijkt deze verhouding tot in 10^{-12} constant te zijn. Bij de gebruikelijke eenheden is deze verhouding gelijk 1 gesteld.

De versnelling g is dus onafhankelijk van de eigen massa

Puntmassa in een centraal krachtveld (1)

Uitgangspunt is de Lagrangiaan voor massa's m_1 en m_2 in interactie met elkaar:

$$L = \frac{1}{2} m_1 \dot{\boldsymbol{r}}_{\mathbf{1}}^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{\boldsymbol{r}}_{\mathbf{2}}^2 - U\left(\left|\boldsymbol{r}_{\mathbf{1}} - \boldsymbol{r}_{\mathbf{2}}\right|\right)$$

Met de oorsprong in het zwaartepunt is $m_1 \boldsymbol{r}_{\mathbf{1}} + m_2 \boldsymbol{r}_{\mathbf{2}} = \mathbf{0}$. Verder stellen wij $\boldsymbol{r} \equiv \boldsymbol{r}_{\mathbf{1}} - \boldsymbol{r}_{\mathbf{2}}$ waarmee $\boldsymbol{r}_{\mathbf{1}} = m_2 \boldsymbol{r} / (m_1 + m_2)$ en $\boldsymbol{r}_{\mathbf{2}} = -m_1 \boldsymbol{r} / (m_1 + m_2)$.

Stellen wij ook nog de gereduceerdemassa $m = m_1 m_2 / (m_1 + m_2)$, dan is de Lagrangiaan:

$$L = \frac{1}{2} m \dot{\boldsymbol{r}}^2 - U(r)$$

Het impulsmoment $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p}$ is een constante van beweging, dus de beweging is in een vlak. Met poolcoördinaten in dit vlak is L nu te schrijven als:

$$L = T - U = \frac{1}{2} m \left(\dot{r}^2 + r^2 \dot{\phi}^2\right) - U(r)$$

Puntmassa in een centraal krachtveld (2)

De **bewegingsvergelijkingen** van Lagrange zijn hierbij:

$$m\ddot{r} - mr\dot{\phi}^2 + \frac{\partial U}{\partial r} = 0 \qquad en \qquad \frac{d}{dt}(mr^2\dot{\phi}) = 0$$

Hieruit volgt dat het impulsmoment $b = mr^2\dot{\phi}$ constant is. Het oppervlak $½\, r^2\dot{\phi}$ dat per tijdseenheid wordt bestreken door de radiusvector is hiermee gelijk aan $b/2m$ en dus ook constant. Dit is de **2^e^ wet van Kepler**, de zgn. **perkenwet**.

Hiermee wordt de eerste vergelijking er een in *r(t)* alleen:

$$m\ddot{r} - \frac{b^2}{mr^3} + \frac{\partial U}{\partial r} = 0$$

Deze uitdrukking wordt nu opgelost voor een planeet met massa m_p (= m_1) in het zwaartekrachtsveld van de zon met massa m_z (= m_2), dus

$$U = -\frac{G m_p m_z}{r}$$

Puntmassa in een centraal krachtveld (3)

Eliminatie van t en integratie van de DV voor $r(\varphi)$ geeft de oplossing de baanvergelijking:

$$r = \frac{p}{1 + \epsilon \cos(\phi - \phi_0)}$$

waarin $p = \frac{b^2}{G m_p m_z m}$ en ε een willekeurige constante groter.

Dit is een kegelsnede: een ellips voor $\varepsilon<1$ (**Kepler's 1e wet**), een parabool voor $\varepsilon=1$ en een hyperbool voor $\varepsilon>1$

De energie $E = T+U$ is constant langs de baan: $E = \frac{G m_p m_z}{2p}(\epsilon^2 - 1)$

Deze is dus negatief voor de elliptische, 0 voor de parabolische en positief voor de hyperbolische baan

Puntmassa in een centraal krachtveld (4)

Met de perkenwet is de omlooptijd T_o gelijk aan het quotiënt van het oppervlak van de ellips en het oppervlak *b/2m* per tijdseenheid.

Met de halve lange as $a = \dfrac{p}{1-\epsilon^2} = \dfrac{b^2}{G m_p m_z m(1-\epsilon^2)}$ is dus

$$T_o = \frac{\pi a^2 \sqrt{1-\epsilon^2}}{b/2m} = \frac{2\pi m p^2}{b(1-\epsilon^2)^{3/2}}$$

Het quotiënt

$$\frac{a^3}{T_o^2} = \frac{b^2(1-\epsilon^2)^3}{4\pi^2 m^2 p^4} \cdot \frac{p^3}{(1-\epsilon^2)^3} = \frac{b^2}{4\pi^2 m^2 p} = \frac{G(m_p+m_z)}{4\pi^2}$$

ofwel $\omega_o^2 a^3 = G(m_p+m_z)$, leidt tot **Kepler's 3^e wet** $(m_z >> m_p)$.

Puntmassa in een centraal krachtveld (5)

Omdat $m_z >> m_p$ is er een vrijwel vast verband tussen de omlooptijden en de halve lange assen van alle planeetbanen in ons zonnestelsel: $\omega_o^2 a^3 = \; 1.328844\, x\, 10^{20} \;\; m^3 s^{-2}$

Bij een waarde van G = 6.673 x 10^{-11} $Kg^{-1}m^3s^{-2}$ voor Newtons constante is dan de massa van de zon M_z = 1.989 x 10^{30} Kg.

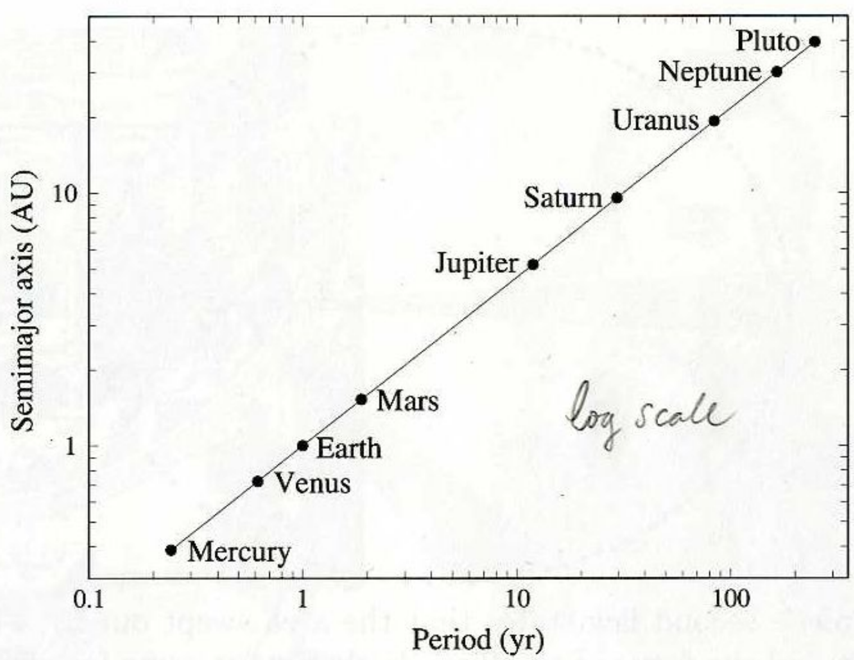


Figure 2.3 Kepler's third law for planets orbiting the Sun.

Precessie (1)

Stel nu dat *U(r)* afwijkt van de vorm *1/r.* De energie is:

$$E = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2) + U(r) = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{b^2}{2mr^2} + U(r)$$

Hiermee is $\dot{r} \equiv \frac{dr}{dt} = \sqrt{\{\frac{2}{m}[E - U(r)] - \frac{b^2}{m^2 r^2}\}}$, zodat na integratie:

$$t = \int \frac{dr}{\sqrt{\{\frac{2}{m}[E - U(r)] - \frac{b^2}{m^2 r^2}\}}} + konstante$$

Uit $b = mr^2\dot{\phi}$ volgt $d\phi = \frac{b}{mr^2}\,dt$ waarmee de baan *φ(r)* wordt verkregen:

$$\phi = \int \frac{b\,dr}{r^2\sqrt{\{2m[E - U(r)] - \frac{b^2}{r^2}\}}} + konstante$$

Precessie (2)

Voor peri- en apohelium is $\dot{r} = 0$, waarmee de bijbehorende r waarden uit

$$E = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \frac{b^2}{2 m r^2} + U(r)$$

worden verkregen.

Bij twee oplossingen beweegt tijdens een omloop de voerstraal van r_{min} naar r_{max} en weer terug en is de voerstraal gedraaid over een hoek

$$\Delta\phi = 2 \int_{r_{min}}^{r_{max}} \frac{b\,dr}{r^2 \sqrt{\left\{2m[E - U(r)] - \frac{b^2}{r^2}\right\}}}$$

De baancurve is alleen gesloten als deze hoek gelijk is aan $2\pi \frac{j}{k}$, want dan heeft de voerstraal na k perioden j omwentelingen gemaakt. Dit is in een zuiver centraalsymmetrisch zwaartekrachts-veld het geval ($j = k = 1$), maar verstoringen ervan leiden tot het wegdraaien van peri- en apohelium.

(figuur)

Precessie (3)

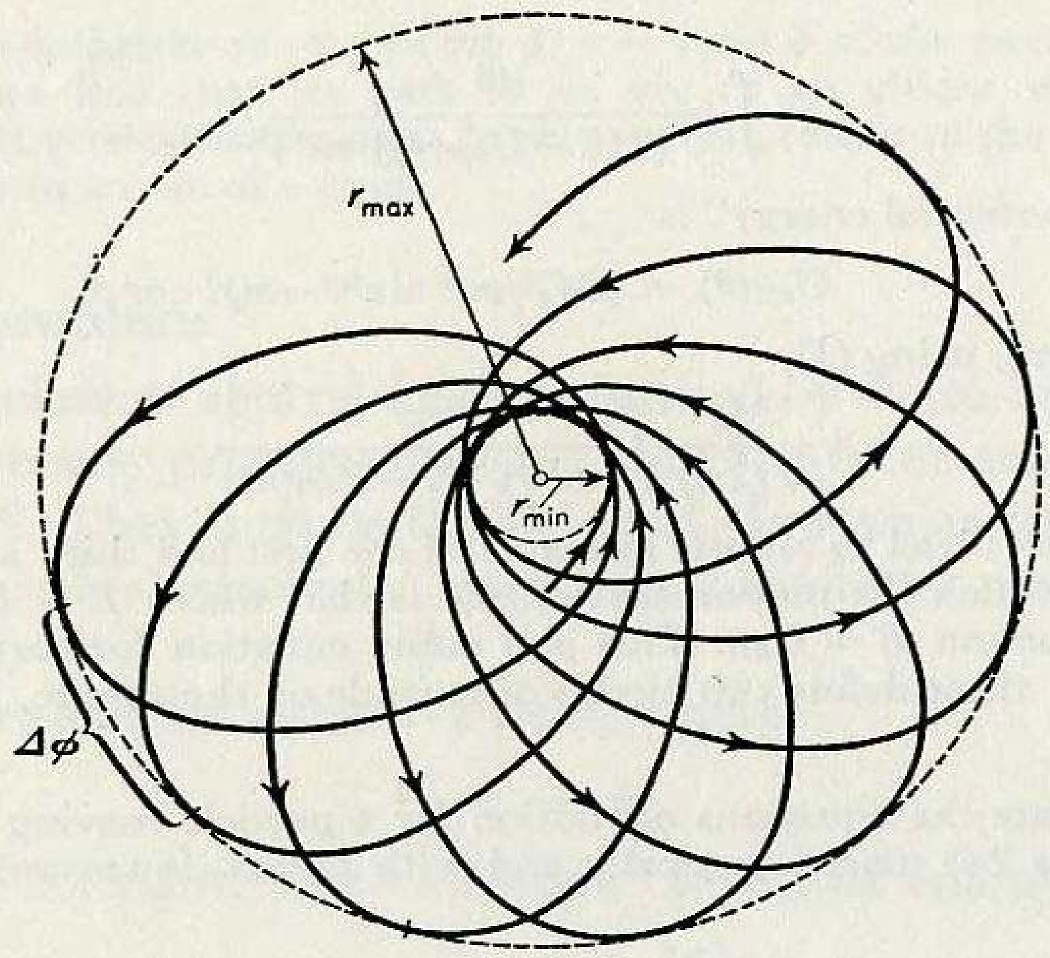


FIG. 9

Precessie (4): Perihelium van Mercurius

Boogseconden per eeuw	Reden
5025.6	Precessie van de aardas *)
531.4	Zwaartekrachtwerking van de andere planeten
0.03	Afplatting van de zon (quadrupoolmoment)
42.98±0.04	Algemene relativiteitstheorie
5600	Totaal
5599.7	Waargenomen

*) Dit geldt voor een aardse waarnemer, het effect is 360° in 25788 jaar

Systeem van puntmassa's en zwaartepunt

Voor de j^e puntmassa in een extern veld $\boldsymbol{F'}_j$ en in interactie met de andere puntmassas van het systeeem:

$$m_j \ddot{\boldsymbol{r}}_{\boldsymbol{j}} = \boldsymbol{F}_{\boldsymbol{j}} = \boldsymbol{F}'_j + \sum_k \boldsymbol{F}_{\boldsymbol{kj}}$$

Voor het hele systeem is dus:

$$\sum_j m_j \ddot{\boldsymbol{r}}_{\boldsymbol{j}} = \frac{d}{dt} \sum_j m_j \dot{\boldsymbol{r}}_{\boldsymbol{j}} \equiv \dot{\boldsymbol{P}} = \sum_j \boldsymbol{F}'_j + \cancel{\sum_{j \neq k} \boldsymbol{F}_{\boldsymbol{kj}}} = \sum_j \boldsymbol{F}'_j \equiv \boldsymbol{F}'$$

en $\dot{\boldsymbol{P}} = \boldsymbol{F}'$

Met het zwaartepunt volgens: $m \boldsymbol{r}_{\boldsymbol{0}} = \sum_j m_j \boldsymbol{r}_{\boldsymbol{j}}$ en met $m = \sum_j m_j$ is dus: $m \ddot{\boldsymbol{r}}_{\boldsymbol{0}} = \boldsymbol{F}'$

Het zwaartepunt van het systeem beweegt alsof de hele massa hier geconcentreerd is en alle uitwendige krachten hier aangrijpen.

Energie van een gesloten systeem

Scalaire vermenigvuldiging van $\sum_j m_j \ddot{\boldsymbol{r}}_j = \sum_j \boldsymbol{F}_j$ met $\dot{\boldsymbol{r}}_j$ levert

$\sum_j m_j \dot{\boldsymbol{r}}_j \cdot \ddot{\boldsymbol{r}}_j = \sum_j \dot{\boldsymbol{r}}_j \cdot \boldsymbol{F}_j$, waarmee

$$\frac{dT}{dt} = \frac{d}{dt} \sum_j \frac{1}{2} m_j \dot{\boldsymbol{r}}_j^2 = \sum_j m_j \dot{\boldsymbol{r}}_j \cdot \ddot{\boldsymbol{r}}_j = \sum_j \dot{\boldsymbol{r}}_j \cdot \boldsymbol{F}_j$$

$$= -\sum_j \left(\frac{\partial U}{\partial x_j} \dot{x}_j + \ldots \right) = -\frac{dU}{dt}$$

zodat $\boldsymbol{E = T + U}$ **= constant**.

Met het zwaartepunt is $\boldsymbol{r}_j = \boldsymbol{r}_0 + \boldsymbol{r}'_j$ en kan de kinetische energie worden geschreven als:

$$T = \sum_j \frac{1}{2} m_j (\dot{\boldsymbol{r}}_0 + \dot{\boldsymbol{r}}'_j)^2 = \frac{1}{2} \left(\sum_j m_j \right) \dot{\boldsymbol{r}}_0^2 + \dot{\boldsymbol{r}}_0 . \cancel{\sum_j m_j \dot{\boldsymbol{r}}'_j} + \sum_j \frac{1}{2} m_j \dot{\boldsymbol{r}}'^2_j$$

$$= \frac{1}{2} m \dot{\boldsymbol{r}}_0^2 + \sum_j \frac{1}{2} m_j \dot{\boldsymbol{r}}'^2_j = T_0 + T'$$

Impulsmoment en draaimoment

Vectorvermenigvuldiging van $\sum_j m_j \ddot{\boldsymbol{r}}_j = \sum_j \boldsymbol{F}_j$ met $\boldsymbol{r}_j$ levert

$$\sum_j m_j \boldsymbol{r}_j \times \ddot{\boldsymbol{r}}_j = \sum_j \boldsymbol{r}_j \times \boldsymbol{F}_j = \sum_j \boldsymbol{r}_j \times \boldsymbol{F}'_j + \cancel{\sum_j \sum_{k \neq j} \boldsymbol{r}_j \times \boldsymbol{F}_{kj}}$$

Hierin is $\boldsymbol{r}_j \times \boldsymbol{F}_{kj} + \boldsymbol{r}_k \times \boldsymbol{F}_{jk} = (\boldsymbol{r}_j - \boldsymbol{r}_k) \times \boldsymbol{F}_{kj} = \boldsymbol{0}$ omdat $(\boldsymbol{r}_j - \boldsymbol{r}_k)$ en $\boldsymbol{F}_{kj}$ gelijk gericht zijn.

Zo volgt hieruit: $\dfrac{d\,\boldsymbol{b}}{dt} \equiv \dfrac{d}{dt} \sum_j m_j \boldsymbol{r}_j \times \dot{\boldsymbol{r}}_j = \sum_j \boldsymbol{r}_j \times \boldsymbol{F}'_j \equiv \boldsymbol{M}'$

het impulsmoment *b* is dus een constante van de beweging van een gesloten systeem (*M'=0*).

Functie van Lagrange (1)

Wij gaan uit van de identiteit

$$\int_{t1}^{t2} \sum_j (m_j \ddot{\boldsymbol{r}}_{\boldsymbol{j}} - \boldsymbol{F}_{\boldsymbol{j}}).\, \delta \boldsymbol{r}_{\boldsymbol{j}} dt = 0$$

Het <u>eerste</u> deel van deze integraal schrijven wij:

$$\int_{t1}^{t2} \sum_j m_j \ddot{\boldsymbol{r}}_j .\, \delta \boldsymbol{r}_{\boldsymbol{j}}\, dt = \sum_j m_j \dot{\boldsymbol{r}}_{\boldsymbol{j}} .\, \delta \boldsymbol{r}_{\boldsymbol{j}} \Big|_{t1}^{t2} - \int_{t1}^{t2} \sum_j m_j \dot{\boldsymbol{r}}_{\boldsymbol{j}} .\, \frac{d}{dt}(\delta \boldsymbol{r}_{\boldsymbol{j}})\, dt$$

$$= -\int_{t1}^{t2} \sum_j m_j \dot{\boldsymbol{r}}_{\boldsymbol{j}} .\, \delta \dot{\boldsymbol{r}}_{\boldsymbol{j}}\, dt = \int_{t1}^{t2} \delta T\, dt$$

want immers is $\sum_j m_j \dot{\boldsymbol{r}}_{\boldsymbol{j}} .\, \delta \dot{\boldsymbol{r}}_{\boldsymbol{j}} \approx \sum_j \frac{1}{2} m_j (\dot{\boldsymbol{r}}_{\boldsymbol{j}} + \delta \dot{\boldsymbol{r}}_{\boldsymbol{j}})^2 - \sum_j \frac{1}{2} m_j \dot{\boldsymbol{r}}_{\boldsymbol{j}}^{\,2}$

$$= \delta \Big(\sum_j \frac{1}{2} m_j \dot{\boldsymbol{r}}_{\boldsymbol{j}}^{\,2}\Big) = \delta T$$

Functie van Lagrange (2)

Het <u>tweede</u> deel van de integraal schrijven wij met $\boldsymbol{F}_{\boldsymbol{j}} = -\nabla U$ als:

$$-\int_{t1}^{t2} \sum_j \boldsymbol{F}_{\boldsymbol{j}} . \delta \boldsymbol{r}_{\boldsymbol{j}} \, dt$$

$$= +\int_{t1}^{t2} \sum_j \left(\frac{\partial U}{\partial x_j} \delta x_j + \frac{\partial U}{\partial y_j} \delta y_j + \frac{\partial U}{\partial z_j} \delta z_j \right) dt = \int_{t1}^{t2} \delta U \, dt$$

Beide delen samen leveren dus:

$$\int_{t1}^{t2} \sum_j (m_j \ddot{\boldsymbol{r}}_{\boldsymbol{j}} - \boldsymbol{F}_{\boldsymbol{j}}) . \delta \boldsymbol{r}_{\boldsymbol{j}} \, dt = -\int_{t1}^{t2} (\delta T - \delta U) \, dt = 0$$

ofwel met de functie van Lagrange: $L = T - U$

$$\delta \int_{t1}^{t2} L \, dt = 0$$

Bewegingsvergelijkingen van Lagrange

Voor de extrema van de actie-integraal is:

$$\delta S = \int_{t1}^{t2} \sum_{j=1}^{3N} \left(\frac{\partial L}{\partial q_j} \delta q_j + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \delta \dot{q}_j \right) dt = 0$$

Partële intergratie levert:

$$\delta S = \cancel{\sum_{j=1}^{3N} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \delta q_j \Big|_{t1}^{t2}} + \int_{t1}^{t2} \sum_{j=1}^{3N} \left(\frac{\partial L}{\partial q_j} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) \delta q_j \, dt$$

Dit moet voor elke willekeurige viruele verplaatsing δq_j gelden, zodat de bewegingsvergelijkingen van Lagrange zijn:

$$\frac{\partial L}{\partial q_j} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} = 0 \qquad (j = 1, 2, \ldots, 3N)$$

De bewegingsvergelijkingen blijven hetzelfde voor $L = L + \left(\frac{d}{dt} f\right) dt$

Impuls en energie direct uit de actiefunctie

Als het eindtijdstip variabel wordt ondersteld, dan kan de actieintegraal S gezien worden als een expliciete functie van de tijd t :

$$\delta S = \sum_{j=1}^{3N} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \delta q_j \Big|_{t_1}^{t} + \int_{t_1}^{t} \sum_{j=1}^{3N} \left(\frac{\partial L}{\partial q_j} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right) \delta q_j \, dt$$

Omdat aan de bewegingsvergelijkingen moet worden voldaan, valt de tweede term rechts weg. We houden over:

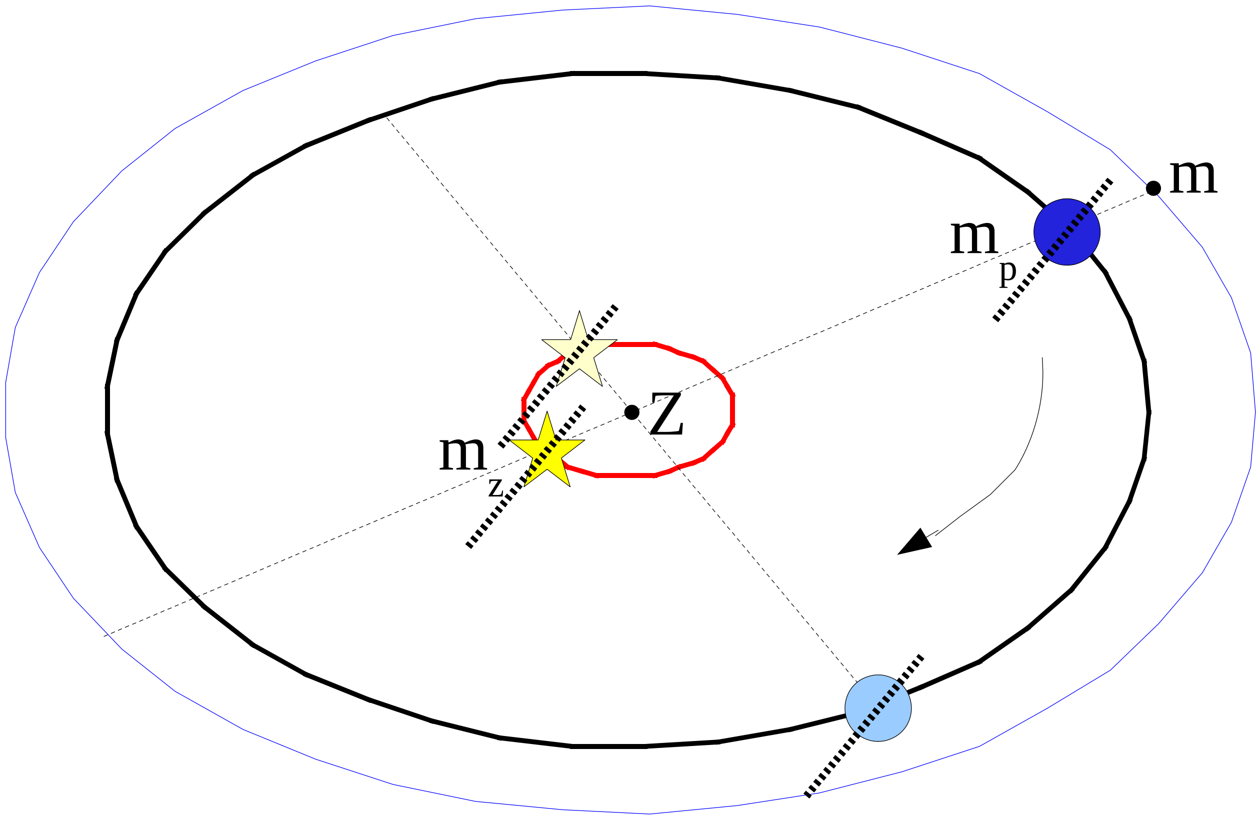
$$\delta S = \sum_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \delta q_j = \sum_j p_j \delta q_j \quad \text{, dus} \quad \boxed{p_j = \frac{\partial S}{\partial q_j}}$$

Verder is $S = \int_{t_1}^{t_2} L \, dt$, dus

$$L = \frac{dS}{dt} = \frac{\partial S}{\partial t} + \sum_j \frac{\partial S}{\partial q_j} \dot{q}_j = \frac{\partial S}{\partial t} + \sum_j p_j \dot{q}_j$$

en met $\sum_j p_j \dot{q}_j - L = \sum_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j - L = E$ is $\boxed{E = -\frac{\partial S}{\partial t}}$

Banen van m, planeet en Zon om het zwaartepunt



- Z = zwaartepunt van het systeem Zon - planeet
- m = positie van de gereduceerde massa in zijn baan
- mp en mz = posities van Zon (mz) en planeet (mp) in hun baan
- NB: geen rotaties van de Zon of planeet door de baanbeweging!